परियोजना

गणित में परियोजना (प्रोजेक्ट) कार्य एक विद्यार्थी द्वारा व्यक्तिगत रूप से किया जा सकता है या संयुक्त रूप से विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा भी किया जा सकता है। ये परियोजनाएँ रचनाओं के रूप में भी हो सकती हैं, जैसे कि वक्र स्कैच करना या आलेखों का खींचना, इत्यादि। यह गणित के इतिहास से किसी विषय विशेष या अवधारणाओं से संबद्ध ऐतिहासिक विकास की चर्चा प्रदान कर सकती है। गणित में परियोजनाओं के लिए, विद्यार्थियों को स्वयं अपनी रुचि के विषय चुनने का विकल्प दें। शिक्षक, इस प्रक्रिया में, विभिन्न विषयों में रुचि जागृत करते हुए, एक सहायक की भूमिका अदा करें। जब विषय चुन लिया जाए, तो विद्यार्थी को चाहिए कि वह इस विषय के बारे में इतना पढ़ने का प्रयत्न करें जितना उपलब्ध हो तथा फिर अंत में परियोजना तैयार करें।

परियोजना 1 आर्यभट – गणितज्ञ तथा खगोलशास्त्री

प्रथम शताब्दी (AD) से पहले, भारत में गणित का बहुत विकास हुआ, परंतु वर्तमान स्वरूप में उनके योगदानों का नामानुसार विवरण ज्ञात नहीं है। प्राचीन काल से भारतीय गणितज्ञों में से एक गणितज्ञ जिसके बारे में कुछ निश्चित सूचना उपलब्ध है, वह है **आर्यभट** तथा उसकी कृति का नाम **आर्यभटिया** है।

जन्म का समय और स्थान

आर्यभट ने अपनी कृति आर्यभटिया में कहा है कि जब उसने आर्यभटिया लिखी तब वह 23 वर्ष का था। उस समय तक कलियुग के 3600 वर्ष बीत चुके थे। इससे यह पता चलता है कि उसने पाँडुलिपि 499 AD में लिखी थी तथा उसके जन्म का वर्ष 476 AD था।

आर्यभट ने पांडुलिपि में यह भी कहा है कि उसने इस कृति में वह ज्ञान दिया है जो उसने कुसुमपुर (पाटिलपुत्र) में अध्ययन करते समय अर्जित किया था। इससे ऐसा प्रतीत होता है कि उसका जन्म पाटिलपुत्र में हुआ था, परंतु अधिकांश व्यक्तियों के मतानुसार उसका जन्म दक्षिण भारत (अशमक जिला, जो गोदावरी नदी के किनारे पर बसा है), में हुआ था। विश्व के प्रसिद्ध गणित इतिहासकार महाराष्ट्र के डॉ. भाउ-दाजी ने आर्यभटिया की पांडुलिपि का दक्षिण भारत से 1864 में पता लगाया तथा उसकी विषय-सामग्री को प्रकाशित किया।

आर्यभटिया संस्कृत में लिखी है तथा चार मुख्य भागों में बंटी हुई है जो 'पाद' कहलाते हैं। इस पांडुलिपि में कुल 121 श्लोक हैं। इसके चार पाद निम्न हैं:

1. दशगीतिका पाद
2. गणित पाद
3. कालक्रियापाद
4. गोलाध्याय

योगदान

1. आर्यभट ने संस्कृत की वर्णमाला के अक्षरों का प्रयोग करते हुए संख्याओं को निरूपित करने की एक नई विधि की रचना की।

इसके अनुसार, उसने 25 वर्ण अक्षरों (व्यंजनों) को निम्नलिखित संख्यात्मक मान दिए–

क : 1, ख : 2, ग : 3, घ : 4, ङ : 5, च : 6, छ : 7, ज : 8, झ : 9, ञ : 10, ट : 11, ठ : 12, ड : 13, ढ : 14, ण : 15, त : 16, थ : 17, द : 18, ध : 19, न : 20, प : 21, फ : 22, ब : 23, भ : 24, म : 25, य : 30, र : 40, ल : 50, व : 60, श : 70, ष : 80, स : 90, ह : 100

स्वरों को उसने निम्नलिखित मान दिए :

अ:1, ई:100, ऊ:10000, ऋ:1000000, लृ:100000000, ए:10000000000, ऐ:1000000000000, ओ:100000000000000, औ:10000000000000000

उदाहरण के तौर पर, आर्यभट कहता है कि महायुग में पृथ्वी सूर्य के चारों ओर 4320000 चक्कर लगाती है। उपरोक्त संख्यात्मक पद्धति के अनुसार, आर्यभट ने इसे **खुयुघृ** के रूप में लिखकर इसे व्यक्त किया है:

खु: $2 \times 10000 = 20000$

यु: $30 \times 10000 = 300000$

घृ: $4 \times 1000000 = 4000000$

खुयुघृ $= 4320000$

2. आर्यभट ने अंकगणित, ज्यामिति और बीजगणित के महत्वपूर्ण सिद्धांतों का गणित पाद में केवल 33 श्लोकों में संक्षिप्त रूप से वर्णन किया है। इन श्लोकों में उन्होंने निम्नलिखित को ज्ञात करने के लिए सूत्र दिए हैं–

- वर्ग और वर्गमूल
- घन और घनमूल
- वर्गों, त्रिभुजों और वृत्तों के क्षेत्रफल
- गोले का आयतन

उनका अति महत्वपूर्ण योगदान π का मान था जो एक वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात होता है। उन्होंने यह मान दशमलव के चार स्थानों तक 3.1416 के रूप में दिया। उन्होंने कहा कि यह π का एक सन्निकट मान है। वे पहले ऐसे भारतीय गणितज्ञ थे जिन्होंने यह कथन दिया कि यह π का सन्निकट मान ही है।

3. आर्यभट ने वृत्त, त्रिभुज और चतुर्भुज खींचने की विधियाँ दी हैं तथा द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियाँ भी दी हैं।
4. उन्होंने पाइथागोरस प्रमेय का कथन दिया है तथा उसका उदाहरणों द्वारा सत्यापन किया है।
5. आर्यभट का एक अन्य महत्वपूर्ण योगदान प्रत्येक 3°45' के अंतराल पर ज्या (साइन) और कोज्या (कोसाइन) फलनों की सारणी बनाना है।
6. आर्यभट ने अपने गोलाध्याय में, खगोलशास्त्र और ज्योतिषशास्त्र के विषय में भी लिखा है। वह ऐसे प्रथम गणितज्ञ थे जिन्होंने यह घोषणा की कि पृथ्वी अपनी धुरी के प्रति घूमती है और नक्षत्र स्थिर हैं, जो पौराणिक कथनों के विरुद्ध था। उन्होंने सूर्य और चंद्र ग्रहणों के बारे में तथा उनके होने के कारणों का भी वर्णन किया है।

परियोजना 2 घनाभों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

पृष्ठभूमि

हमारे दैनिक जीवन में घनाभाकार वस्तुएँ बहुत उपयोगी हैं तथा प्रायः हमें विभिन्न कारणोंवश इनके पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। कभी-कभी ऐसा प्रतीत होता है कि यदि किसी घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि हो तो उसके आयतन में भी वृद्धि हो जाएगी तथा ऐसा ही इसके विलोम के लिए भी हो सकता है। प्रस्तुत परियोजना इस कथन के बारे में सत्यता जानने की दिशा में एक कदम है।

उद्देश्य

घनाभों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों के व्यवहारों में एक-दूसरे के सापेक्ष परिवर्तनों की खोज करना।

विवरण

(A) समान (बराबर) आयतनों के घनाभ

आइए बराबर आयतनों वाले कुछ घनाभों पर विचार करें, जिनकी विमाएँ निम्नलिखित हैं-

(i) $l = 12$ cm, $b = 6$ cm और $h = 3$ cm

(ii) $l = 6$ cm, $b = 6$ cm और $h = 6$ cm

(iii) $l = 9$ cm, $b = 6$ cm और $h = 4$ cm

(iv) $l = 8$ cm, $b = 6$ cm और $h = 4.5$ cm

अब हम सूत्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(lb + bh + hl)$ का प्रयोग करके उपरोक्त घनाभों के पृष्ठीय क्षेत्रफल परिकलित करते हैं।

(i) के लिए, पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(12 \times 6 + 6 \times 3 + 3 \times 12)\ \text{cm}^2 = 252\ \text{cm}^2$

(ii) के लिए, पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(6 \times 6 + 6 \times 6 + 6 \times 6)\ \text{cm}^2 = 216\ \text{cm}^2$ $\rightarrow$ **न्यूनतम**

(iii) के लिए, पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(9 \times 6 + 6 \times 4 + 4 \times 9)\ \text{cm}^2 = 228\ \text{cm}^2$

(iv) के लिए, पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(8 \times 6 + 6 \times 4.5 + 4.5 \times 8)\ \text{cm}^2 = 222\ \text{cm}^2$

14/04/18

हम देखते हैं कि प्रत्येक घनाभ का आयतन

$= 12 \times 6 \times 3 \text{ cm}^3 = 6 \times 6 \times 6 \text{ cm}^3$

$= 9 \times 6 \times 4 \text{ cm}^3 = 8 \times 6 \times 4.5 \text{ cm}^3 = 216 \text{ cm}^3$ है

हम यह भी देखते हैं कि स्थिति (ii) में, घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम है, जबकि यह घनाभ एक घन है।

(B) बराबर पृष्ठीय क्षेत्रफल वाले घनाभ

आइए अब कुछ बराबर पृष्ठीय क्षेत्रफल वाले घनाभों पर विचार कीजिए, जिनकी विमाएँ निम्नलिखित हैं–

(v) $l = 14$ cm, $b = 6$ cm और $h = 5.4$ cm

(vi) $l = 10$ cm, $b = 10$ cm और $h = 4.6$ cm

(vii) $l = 8$ cm, $b = 8$ cm और $h = 8$ cm

(viii) $l = 16$ cm, $b = 6.4$ cm और $h = 4$ cm

अब हम सूत्र आयतन $= l \times b \times h$ का प्रयोग करते हुए, उपरोक्त घनाभों में से प्रत्येक का आयतन परिकलित करते हैं।

(v) के लिए, आयतन $= 14 \times 6 \times 5.4 \text{ cm}^3 = 453.6 \text{ cm}^3$

(vi) के लिए, आयतन $= 10 \times 10 \times 4.6 \text{ cm}^3 = 460 \text{ cm}^3$

(vii) के लिए, आयतन $= 8 \times 8 \times 8 \text{ cm}^3 = 512 \text{ cm}^3 \rightarrow$ **अधिकतम**

(viii) के लिए, आयतन $= 16 \times 6.4 \times 4 \text{ cm}^3 = 409.6 \text{ cm}^3$

हम देखते हैं कि इन घनाभों में से प्रत्येक का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\,(14 \times 6 + 6 \times 5.4 + 5.4 \times 14) \text{ cm}^2$

$= 2\,(10 \times 10 + 10 \times 4.6 + 4.6 \times 10) \text{ cm}^2$

$= 2\,(8 \times 8 + 8 \times 8 + 8 \times 8) \text{ cm}^2$

$= 2\,(16 \times 6.4 + 6.4 \times 4 + 4 \times 16) \text{ cm}^2 = 384 \text{ cm}^2$

हम यह भी देखते हैं कि स्थिति (vii) में, घनाभ का आयतन अधिकतम है, जबकि यह घनाभ एक घन है।

14/04/18

निष्कर्ष

यह कथन कि यदि किसी घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि हो तो उसके आयतन में भी वृद्धि हो जाएगी तथा इसका विलोम भी सत्य नहीं है। वस्तुतः हमें प्राप्त है–

(i) बराबर आयतनों वाले सभी घनाभों में, घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होता है।

(ii) बराबर पृष्ठीय क्षेत्रफलों वाले सभी घनाभों में, घन का आयतन अधिकतम होता है।

अनुप्रयोग

इस परियोजना का उपयोग न्यूनतम लागत पर अधिकतम धारिता वाले पैकेजेज तैयार करने में होता है।

परियोजना 3 गोल्डन आयत और गोल्डन अनुपात

पृष्ठभूमि

'आयत' और 'अनुपात' ऐसी दो अवधारणाएँ हैं जिनका हमारे दैनिक जीवन में बहुत महत्व है। इसी कारण, इनका किसी न किसी रूप में स्कूली गणित के प्रत्येक स्तर पर अध्ययन किया जाता है। यह भी एक तथ्य है कि जब कभी भी आयतों और अनुपातों की चर्चा होती है, लोग 'गोल्डन आयत' और 'गोल्डन अनुपात' के बारे में कुछ स्मरण करना प्रारंभ कर देते हैं। उपरोक्त को दृष्टिगत रखते हुए, यह अनुभव किया गया कि इन दो वाक्यांशों **'गोल्डन आयत'** और **'गोल्डन अनुपात'** के बारे में कुछ जानकारी प्राप्त की जाए।

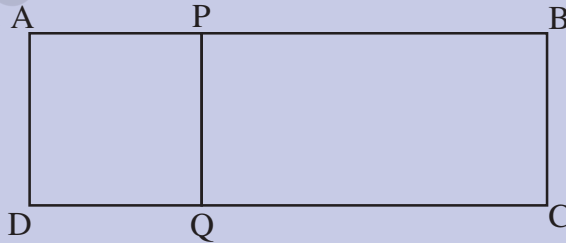
उद्देश्य

'गोल्डन आयत' और 'गोल्डन अनुपात' के अर्थों तथा इनके कुछ अन्य गणितीय अवधारणाओं के बीच संबंधों की खोज करना।

विवरण

'गोल्डन आयत' और 'गोल्डन अनुपात' बहुत निकट से संबंधित अवधारणाएँ हैं। इसे समझने के लिए, आइए सर्वप्रथम एक गोल्डन आयत का अर्थ समझें।

(A) गोल्डन आयत

कोई आयत एक गोल्डन आयत कहलाता है, यदि उसे ऐसे दो भागों में विभाजित किया जा सके कि इनमें से एक भाग एक वर्ग हो तथा दूसरा भाग एक आयत हो जो प्रारंभिक आयत के समरूप हो। निम्नलिखित आकृति में, आयत ABCD को एक वर्ग APQD और एक आयत QPBC में विभाजित किया गया है।

यदि आयत QPBC, आयत ABCD के समरूप हो, तो हम कह सकते हैं कि ABCD एक गोल्डन आयत है। मान लीजिए कि $AB = l$ और $BC = b$ है। अत:, $QP = b$ है।

अब, क्योंकि ABCD ~ QPBC है, इसलिए हमें प्राप्त है–

$$\frac{AB}{BC} = \frac{QP}{PB}$$

या $\frac{l}{b} = \frac{b}{l-b}$

या $l^2 - lb = b^2$

अर्थात्, $l^2 - lb - b^2 = 0$

या $\left(\frac{l}{b}\right)^2 - \frac{l}{b} - 1 = 0$ (1)

मान लीजिए कि $\frac{l}{b} = x$ है।

अत:, (1) से हमें प्राप्त होता है–

$$x^2 - x - 1 = 0$$

या $x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times(1)(-1)}}{2\times1} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (द्विघात समीकरण को हल करने पर)

अब, क्योंकि x ऋणात्मक नहीं हो सकता, इसलिए $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ है।

इस प्रकार $\frac{l}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ है।

अर्थात्, किसी आयत को गोल्डन आयत होने के लिए यह आवश्यक है कि उसकी लंबाई और चौड़ाई का अनुपात $\frac{l}{b}$ अवश्य ही $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ होना चाहिए।

अनुपात $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **गोल्डन अनुपात** कहलाता है। इसका मान लगभग 1.618 है।

इस प्रकार, यह देखा जा सकता है कि गोल्डन अनुपात एक गोल्डन आयत की लंबाई और चौड़ाई, अर्थात् उसकी भुजाओं का अनुपात होता है।

(B) गोल्डन अनुपात तथा एक सतत भिन्न

आइए एक सतत भिन्न

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$$

पर विचार करें।

हम देखते हैं कि यह एक अपरिमित सतत भिन्न है। हम इसे $x=1+\frac{1}{x}$ लिख सकते हैं।

अत:, $x^2 = x + 1$

या, $x^2 - x - 1 = 0$

यह वैसी ही द्विघात समीकरण है जैसी हमें पहले प्राप्त हुई थी।

अत:, हमें पुन: $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ प्राप्त होता है (ऋणात्मक मूल को छोड़ते हुए)

अत:, यह कहा जा सकता है कि गोल्डन अनुपात, सीमांत रूप में, अपरिमित सतत भिन्न

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$$

के बराबर है।

(C) गोल्डन अनुपात, सतत भिन्न और एक अनुक्रम

गोल्डन अनुपात तथा सतत भिन्न में संबंध देखने के बाद,

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

14/04/18

आइए इस भिन्न के विभिन्न स्तरों पर मानों की जाँच करें, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है–
1 को लेने पर, हमें मान 1 प्राप्त होता है;

$1+\frac{1}{1}$ को लेने पर, हमें मान $\frac{2}{1}$ प्राप्त होता है;

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$ को लेने पर, हमें मान $\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है;

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$ को लेने पर, हमें मान $\frac{5}{3}$ प्राप्त होता है;

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$ को लेने पर, हमें $\frac{8}{5}$ प्राप्त होता है, इत्यादि।

इस प्रकार, विभिन्न स्तरों पर प्राप्त किए गए मान हैं–

$1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$

इन मानों के अंश 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... हैं।

ये मान निम्नलिखित पैटर्न प्रदर्शित करते है:

3 = 1 + 2, 5 = 2 + 3, 13 = 5 + 8 इत्यादि।

ध्यान दीजिए कि यदि इन मानों में आगे 1 सम्मिलित कर लिया जाए, तो इनका रूप निम्नलिखित हो जाएगा:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

यह एक प्रसिद्ध अनुक्रम है जो **फ़िबोनाशी अनुक्रम** कहलाता है।

यह ज्ञात किया जा सकता है कि फ़िबोनाशी अनुक्रम का nवां पद $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right]$ होता है।

यह भी देखा जा सकता है कि उपरोक्त व्यंजक में, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ गोल्डन अनुपात है।

(D) गोल्डन अनुपात और त्रिकोणमितीय अनुपात

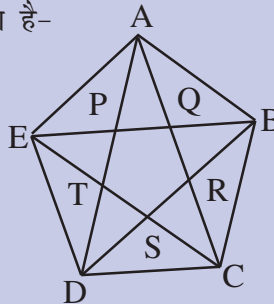
यह ज्ञात किया जा सकता है कि

$$\cos 36° = \sin 54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

अर्थात, $2 \cos 36° = 2 \sin 54° = 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ = गोल्डन अनुपात

इस प्रकार, यह कहा जा सकता है कि $\cos 36°$ के मान का दुगुना (या $\sin 54°$ के मान का दुगुना) गोल्डन अनुपात के बराबर होता है।

(E) गोल्डन अनुपात और सम पंचभुज

हम जानते हैं कि वह पंचभुज जिसकी सभी भुजाएँ और सभी कोण बराबर हों, एक सम पंचभुज कहलाता है। स्पष्टत:, एक सम पंचभुज का प्रत्येक अंत:कोण $\frac{540°}{5} = 108°$ होगा। आइए एक सम पंचभुज ABCDE खींचें, और उसके सभी विकर्ण AC, AD, BD, BE और CE खींचें। जैसा नीचे आकृति में दर्शाया गया है–

यह देखा जा सकता है कि इस सम पंचभुज के अंदर एक अन्य पंचभुज PQRST बन गया है। साथ ही, यह पंचभुज भी एक सम पंचभुज है।

यह भी देखा जा सकता है कि $\frac{AP}{PQ}, \frac{AP}{PT}, \frac{AQ}{PQ}, \frac{DS}{SR}, \ldots$ में से सभी $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के बराबर हैं।

अर्थात् किसी विकर्ण के एक ओर के उस भाग की लंबाई, जिससे नए पंचभुज की एक भुजा नहीं बनती है और नए पंचभुज की एक भुजा की लंबाई का अनुपात गोल्डन अनुपात के बराबर होता है। (1)

साथ ही, यह भी देखा जा सकता है कि $\frac{AE}{AP}, \frac{AB}{BQ}, \frac{CD}{DS}, \frac{BC}{CS}, \ldots$ में से सभी $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के बराबर हैं।

अर्थात्, दिए हुए सम पंचभुज की किसी भुजा की लंबाई तथा उसके विकर्ण के एक ओर के उस भाग की लंबाई का अनुपात, जिससे नए पंचभुज की एक भुजा नहीं बनती है, गोल्डन अनुपात के बराबर होता है। (2)

उपरोक्त परिणामों (1) और (2) को संयोजित करने पर, यह देखा जा सकता है कि उपरोक्त दोनों सम पंचभुजों ABCDE और PQRST में,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \ldots = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$, अर्थात् (गोल्डन अनुपात)^2

अर्थात् दोनों सम पंचभुजों ABCDE और PQRST की संगत भुजाओं का अनुपात (गोल्डन अनुपात)^2 के बराबर होता है।

हम यह भी जानते हैं कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है। वस्तुत: यह सभी समरूप बहुभुजों के लिए सत्य है।

साथ ही, सभी सम बहुभुज सदैव समरूप होते हैं।
अत:, यह भी कहा जा सकता है कि

उपरोक्त पंचभुजों ABCDE और PQRST के क्षेत्रफलों का अनुपात =

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \ldots$$

अतः, इन पंचभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = $\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2\right)^2$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4 = (\text{गोल्डन अनुपात})^4$$

इस प्रकार, उपरोक्त दोनों सम पंचभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4 = (\text{गोल्डन अनुपात})^4$ है।

[**टिप्पणी :** त्रिकोणमितीय अनुपातों तथा सम पंचभुजों से संबंधित उपरोक्त परिणामों को, वास्तव में, कक्षा XI के सरल त्रिकोणमितीय ज्ञान से सिद्ध किया जा सकता है।].

निष्कर्ष

गोल्डन आयत और गोल्डन अनुपात बहुत ही निकटतम संबंधित अवधारणाएँ हैं, जिनमें अन्य गणितीय अवधारणाएँ भी सम्मिलित हैं, जैसे कि भिन्न, समरूपता, द्विघात समीकरण, सम पंचभुज, त्रिकोणमितीय अनुपात, अनुक्रम इत्यादि। सेकेंडरी स्तर पर कुछ मूलभूत जानकारी और समझ प्राप्त करने के बाद, इनका अध्ययन उच्चतर कक्षाओं में उपयुक्त स्थानों और उपयुक्त समय पर विस्तृत रूप से किया जा सकता है।

अनुप्रयोग

यह परियोजना भवनों के डिज़ाइन बनाने, आर्किटैक्चर और संरचनात्मक इंजीनियरिंग में उपयोगी रहती है।

14/04/18

परियोजना 4 π - विश्व की अति रहस्यपूर्ण संख्या

π क्या है?

संकेत π यूनानी वर्णमाला का 16वाँ अक्षर है। प्राचीन यूनानी ग्रंथों में, π का प्रयोग संख्या 80 को निरूपित करने में किया जाता था। बाद में, गणितज्ञों ने अक्षर π को वृत्त से संबंधित एक अति महत्वपूर्ण मान को निरूपित करने के लिए चुना।

विशेष रूप से, π को किसी वृत्त की परिधि के उसके व्यास के साथ अनुपात को निरूपित करने के लिए चुना गया।

सांकेतिक रूप से, $\pi = \frac{c}{d}$ होता है, जहाँ c वृत्त की परिधि, तथा d उसके व्यास की लंबाई को निरूपित करता है। क्योंकि वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का दुगुना होता है, इसलिए $d = 2r$ है, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।

अतः, $\pi = \frac{c}{2r}$ हुआ।

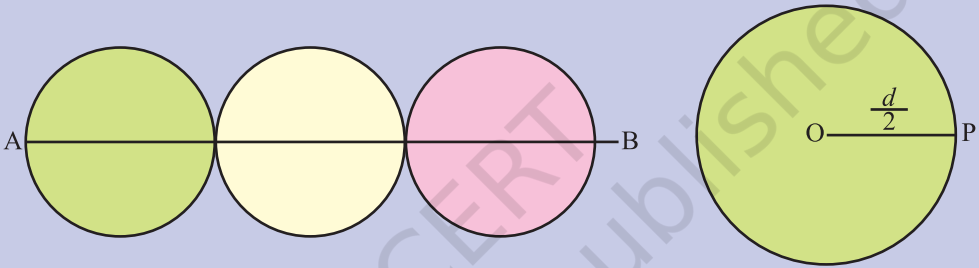
गणित में संकेत π कहाँ से आया?

सुप्रसिद्ध गणित इतिहासकार फ़्लोरियन काजोरी (1859-1930) के अनुसार, सर्वप्रथम संकेत π का गणित में प्रयोग विलियम ओट्रेड (1575-1660) द्वारा 1652 में किया गया, जब उन्होंने वृत्त की परिधि और उसके व्यास के अनुपात को $\frac{\pi}{\delta}$ के रूप में लिखा, जिसमें π ने वृत्त की परिसीमा को निरूपित किया तथा δ ने वृत्त के व्यास को निरूपित किया।

विलियम जोन्स (1675-1749) ने 1706 में, अपनी पुस्तक सिनाप्सिस पामोरियोरम मैथेसियोस प्रकाशित की, जिसमें उन्होंने π का प्रयोग वृत्त की परिधि के उसके व्यास के साथ अनुपात को निरूपित करने के लिए किया। ऐसा विश्वास किया जाता है कि π का इस प्रकार का प्रयोग सबसे पहली बार हुआ, जैसा कि आजकल या वर्तमान रूप में परिभाषित या प्रयोग किया जाता है। अन्य व्यक्तियों में, स्विटज़रलैंड के गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर ने भी π का प्रयोग वृत्त की परिधि के उसके व्यास के साथ अनुपात को निरूपित करना प्रारंभ कर दिया।

π का मान

ऐसा कहा जाता है कि पहिये की खोज के बाद, संभवत: परिधि को तुलना करने की दृष्टि से मापा गया। शायद, प्रारंभिक काल में यह मापना महत्वपूर्ण होगा कि एक पहिया एक चक्कर में कितनी दूरी तय करेगा। इस दूरी को मापने के लिए, पहियों को मापी जाने वाली दूरी पर रखना सुविधाजनक था, जिससे पता चलता है कि यह लंबाई पहिए के व्यास के तीन गुने से कुछ अधिक है।

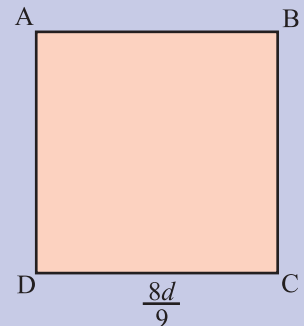
इस प्रकार के क्रियाकलाप की विभिन्न पहियों को लेकर पुनरावृत्ति करने पर पता चला कि प्रत्येक बार, परिधि व्यास के तीन गुने से कुछ अधिक है।

आकृति 1 : AB = पहिये की परिधि

इससे ज्ञात हुआ कि π का मान 3 से कुछ अधिक है। बार-बार मापने पर, यह भी ज्ञात हुआ कि व्यास के तीन गुने से अधिक भाग व्यास के $\frac{1}{9}$ भाग के अति निकट है। यह कहा जाता है कि एक मिस्रवासी अहम्स द्वारा लगभग 1650 BC में लिखे रींड पैपिरस में, यह वर्णित किया गया है कि यदि एक वर्ग की भुजा की लंबाई किसी वृत्त के व्यास की लंबाई की $\frac{8}{9}$ हो, तो इस वर्ग का क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

आकृति 2

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\frac{d^2}{4}$

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2$

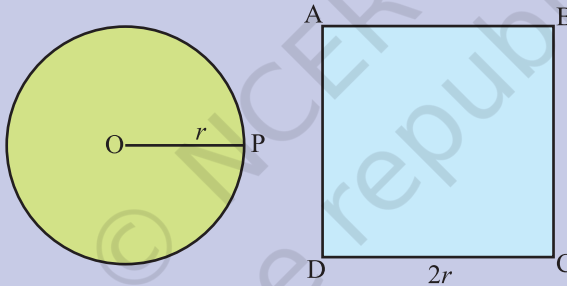
14/04/18

अतः, $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{64}{81} d^2$ जिससे $\pi = \frac{256}{81} = 3.160493827\overline{160493827}$

इससे π का एक न्याययुक्त सन्निकट मान प्राप्त होता है।

आर्किमिडीज़ का योगदान

लगभग 287 BC में साइराक्थूस में जन्में, आर्किमिडीज़ ने वृत्त के संदर्भ में निम्नलिखित कथन दिया, जिसकी π के मान के ऐतिहासिक विकास में अति महत्वपूर्ण भूमिका रही।

1. एक वृत के क्षेत्रफल और वृत्त के व्यास के बराबर भुजा वाले वर्ग के क्षेत्रफल का अनुपात 11:14 के निकट है।

$$\frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{11}{14}$$

आकृति 3

अर्थात्, $\pi = \frac{44}{14} = \frac{22}{7}$

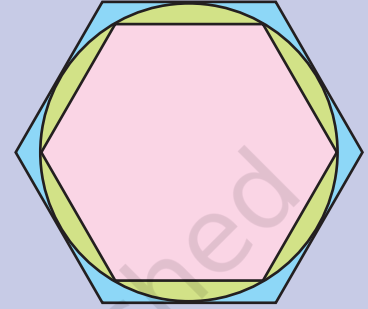
पुनः, यह π का एक प्रसिद्ध सन्निकट मान है, जिसका प्रयोग हम अधिकांशतः मेंसुरेशन (क्षेत्रमिति) के प्रश्नों को हल करने में करते हैं।

2. वृत्त की परिधि उसके व्यास के $3\frac{1}{7}$ गुने से कम होती है, परंतु $3\frac{10}{71}$ गुने से अधिक होती है। अर्थात् $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ है।

आइए देखें कि आर्किमिडीज़ वास्तव में किस प्रकार इस निष्कर्ष पर पहुँचे। उन्होंने इसके लिए एक दिए हुए वृत्त के अंतर्गत सम बहुभुज (समबाहु त्रिभुज, वर्ग, एक सम पंचभुज, एक सम षड्भुज, इत्यादि) खींचे (देखिए आकृति 4) तथा ऐसे ही सम बहुभुज उस वृत्त के परिगत खींचे।

दोनों ही स्थितियों में, बहुभुज का परिमाप वृत्त की परिधि के निकटतम और अधिक निकटतम होता जाता था।

आकृति 4

उन्होंने इस प्रक्रिया को 12 भुजाओं वाले सम बहुभुज, 24 भुजाओं सम बहुभुज, 48 भुजाओं वाले सम बहुभुज और 96 भुजाओं वाले समबहुभुज लेकर दोहराया। उन्हें प्रत्येक बार, बहुभुजों के परिमाप वृत्त की परिधि के निकटतम और अधिक निकटतम आते जाते थे। अंत में, आर्किमिडीज़ ने निष्कर्ष निकाला कि π का मान $3\frac{10}{71}$ से अधिक और $3\frac{1}{7}$ से कम होता है।

हम जानते हैं कि

$$3\frac{10}{71} = 3.\overline{1408450704225352112676056338028169 0}$$

और $3\frac{1}{7} = 3.\overline{142857}$

इस प्रकार, आर्किमिडीज़ ने π का वह मान दिया जो उस मान के संगत है, जिससे हम आजकल परिचित हैं और प्रयोग करते हैं।

चीन का योगदान

लियु हुई ने भी 263 में, वृत्त का सन्निकट करने के लिए, भुजाओं की संख्या में वृद्धि करते हुए, सम बहुभुजों का प्रयोग किया। उन्होंने केवल अंतर्गत वृत्तों का प्रयोग किया, जबकि आर्किमिडीज़ ने अंतर्गत और परिगत दोनों प्रकार के वृत्तों का प्रयोग किया। लियु द्वारा π का दिया हुआ सन्निकट मान था:

14/04/18

$$\frac{3927}{1250} = 3.1416$$

जु चोंगजी (429-500), जो एक चीनी खगोलशास्त्री और गणितज्ञ थे, ने ज्ञात किया कि

$$\pi = \frac{355}{113} = 3.\overline{1415929203539823008 84}$$
$$\overline{9557522123893805309 73}$$
$$\overline{4513274336283185840 70796}$$
$$\overline{4601769911504424778 76106}$$
$$\overline{1946902654867256637168}$$

अन्य व्यक्तियों का योगदान

1. जॉन वॉलिस (1616-1703), जो केम्ब्रिज और ऑक्सफोर्ड विश्वविद्यालयों में गणित के प्रोफेसर थे उन्होंने π के लिए निम्नलिखित सूत्र दिया–

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\times2}{1\times3}\times\frac{4\times4}{3\times5}\times\frac{6\times6}{5\times7}\times\ldots\times\frac{2n\times2n}{(2n-1)(2n+1)}\times\ldots$$

2. ब्राउंकर (1620-1684) ने $\frac{4}{\pi}$ का निम्नलिखित मान प्राप्त किया:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ldots}}}}}$$

3. आर्यभट (499) ने π का मान $\frac{62832}{20,000} = 3.14156$ दिया।

4. ब्रह्मगुप्त (640) ने π का मान $\sqrt{10} = 3.162277$ दिया।

5. अलख्वारिजमी (800) ने π का मान 3.1416 दिया।

6. बेबीलोनवासियों ने π का मान $3+\frac{1}{8}=3.125$ के रूप में प्रयोग किया।

7. टोक्यो विश्वविद्यालय में, यासुमासा कनड और उसकी टीम ने π का मान 1.24 ट्रिलियन दशमलव स्थानों तक परिकलित किया।

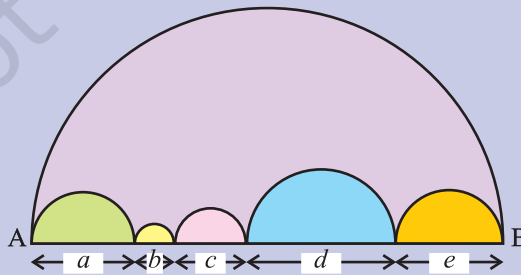
8. फ्राँसीसी गणितज्ञ फ्रेंकोइस वीटे (1540-1603) ने π का मान नौ दशमलव स्थानों तक परिकलित किया। उन्होंने परिकलित किया कि π का मान 3.1415926535 और 3.1415926537 संख्याओं के बीच स्थित है।

9. एस. रामानुजन (1887-1920) ने π का मान $\sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}} = 3.141592652 \ldots$ के रूप में परिकलित किया, जो आठ दशमलव स्थानों तक सही है।

10. लियोनार्ड ऑयलर ने π के मान के लिए एक रोचक व्यंजक दिया जो नीचे दिया गया है :

$$\frac{2}{\pi} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{64}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right) \ldots,$$

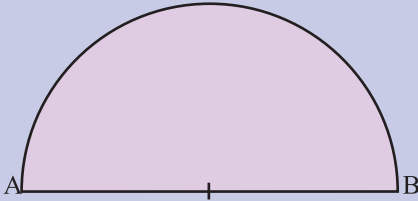
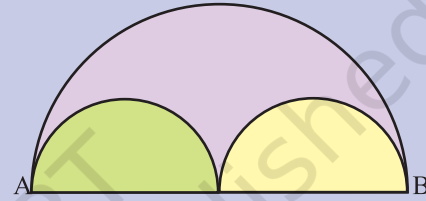
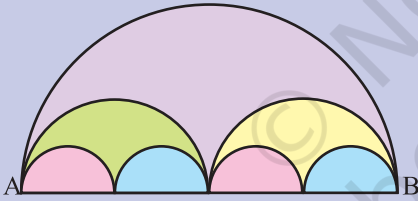
एक π विरोधाभास (paradox)

उपरोक्त आकृति में, व्यास AB वाले अर्धवृत्त का परिमाप $= \frac{\pi}{2}(AB)$ है।

आकृति 5

छोटे अर्धवृत्तों के परिमापों का योग

$$= \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi b}{2} + \frac{\pi c}{2} + \frac{\pi d}{2} + \frac{\pi e}{2} = \frac{\pi}{2}(a+b+c+d+e)$$

यह सत्य प्रतीत नहीं होता है, परंतु यह सत्य ही है!

आइए अब निम्नलिखित प्रकार से आगे बढ़ें– निश्चित रेखाखंड AB के अनुदिश छोटे अर्धवृत्तों की संख्या में वृद्धि करते जाइए। मान लीजिए AB की लंबाई 2 इकाई है।

आकृति 6

आकृति 7

आकृति 8

आकृति 9

उपरोक्त आकृतियों में, छोटे अर्धवृत्तों के परिमापों की लंबाइयों का योग व्यास AB की लंबाई की ओर अग्रसर होता हुआ प्रतीत हो रहा है, परंतु वास्तव में ऐसा नहीं है, क्योंकि छोटे अर्धवृत्तों के परिमापों की लंबाइयों का योग $\frac{\pi \times 2}{2} = \pi$ इकाई है, जबकि AB की लंबाई 2 इकाई है। इसलिए ये दोनों बराबर नहीं हो सकते।

14/04/18

निष्कर्ष

π को अभूतपूर्व गुणों वाली एक संख्या के रूप में देखा जा सकता है। इसके वास्तविक जीवन में विभिन्न प्रकार के अनुप्रयोग हैं।

अनुप्रयोग

π के मान का प्रयोग वृत्त से संबंधित डिज़ाइनों तथा वृत्त के त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफलों और परिमापों को ज्ञात करने में प्रयोग किया जाता है। इसका प्रयोग दौड़पथों (racetracks) की रचना करने तथा इंजीनियरिंग संयंत्रों या उपकरणों को बनाने में किया जाता है।

परियोजनाओं की सूची

1. एक त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए, हीरोन का सूत्र विकसित करना।
2. π की कहानी।
3. संख्या पद्धतियों का उनकी आवश्यकतानुसार विकास।
4. भारतीय गणितज्ञों का उनके योगदानों के साथ कालक्रम।
5. एक द्विघात समीकरण के हल का कालक्रमिक विकास।
6. एक चक्रीय चतुर्भुज के क्षेत्रफल के सूत्र का विकास।
7. पाइथागोरस प्रमेय – वर्तमान पुस्तक में दी गई उपपत्ति से भिन्न उपपत्तियाँ।
8. पाइथागोरस प्रमेय के विस्तार।
9. दिए हुए परिमाप के आयतों में से अधिकतम क्षेत्रफल वाला आयत ज्ञात करना तथा दिए हुए क्षेत्रफल वाले आयतों में से न्यूनतम परिमाप का आयत ज्ञात करना।
10. पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों के सापेक्ष ठोस आकृतियों का ज्ञान और वर्गीकरण।
11. किसी बहुभुज के एक ही क्रम में लिए गए बहिष्कोणों का योग।
12. पाइथागोरियन त्रिकों (Triplets) को जनित करना।
13. मैजिक वर्ग।
14. दिए हुए पृष्ठीय क्षेत्रफल वाले घनाभों में से अधिकतम आयतन वाला घनाभ ज्ञात करना तथा दिए हुए आयतन वाले घनाभों में से न्यूनतम पृष्ठीय क्षेत्रफल वाला घनाभ ज्ञात करना।
15. गणितीय डिज़ाइन और पैटर्न।
16. भारतीय गणितज्ञ तथा उनके योगदान।
17. गणित पर उद्धरणों की सूची बनाना।
18. रामानुजन संख्या (1729)।
19. गणितीय क्रॉसवर्ड।
20. दैनिक जीवन में ज्यामिति के अनुप्रयोग।
21. बीजगणित के दैनिक जीवन में अनुप्रयोग।
22. क्षेत्रमिति के दैनिक जीवन में अनुप्रयोग।

मूल्यांकन की योजना

सेकेंडरी स्तर पर गणित में मूल्यांकन के निम्नलिखित भार निर्दिष्ट किए गए हैं–

सैद्धांतिक परीक्षा	:	80 अंक
आंतरिक मूल्यांकन	:	20 अंक

1. स्कूली परीक्षा पर आधारित 20 अंकों के आंतरिक मूल्यांकन का बंटन निम्नलिखित है–

वर्ष के अंत तक के क्रियाकलापों का मूल्यांकन	:	12 अंक
परियोजना कार्य का मूल्यांकन	:	5 अंक
मौखिक मूल्यांकन (या वाइवा-वोस)	:	3 अंक

- **क्रियाकलाप कार्य का मूल्यांकन**

(a) प्रत्येक विद्यार्थी को निर्दिष्ट समय में करने के लिए दो क्रियाकलाप दिए जाएँगे।

(b) मूल्यांकन दो गणित शिक्षकों की एक ऐसी टीम द्वारा किया जाना चाहिए जिसमें वह शिक्षक भी सम्मिलित हो जो कक्षाओं में प्रयोग कराता है।

(c) एक अकेले क्रियाकलाप के लिए, 12 अंकों के मूल्यांकन का बंटन इस प्रकार हो सकता है–

• क्रियाकलाप के उद्देश्य का कथन	:	1 अंक
• आवश्यक सामग्री	:	1 अंक
• क्रियाकलाप की तैयारी करना	:	3 अंक
• क्रियाकलाप को करना	:	3 अंक
• प्रेक्षण और विश्लेषण	:	3 अंक
• परिणाम और निष्कर्ष	:	1 अंक
योग	:	**12 अंक**

(d) पहले दोनों क्रियाकलापों के अंकों को जोड़िए और फिर इनको 12 अंकों के आधार पर परिकलित कीजिए।

(e) प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा क्रियाकलापों का संपूर्ण रिकॉर्ड रखना चाहिए।

- **परियोजना कार्य का मूल्यांकन**

(a) प्रत्येक विद्यार्थी से कक्षा में पढ़ाई गई अवधारणाओं पर आधारित न्यूनतम एक परियोजना कार्य करने को कहा जाएगा।

(b) परियोजना कार्य एक व्यक्ति (या दो या तीन विद्यार्थियों के एक समूह) द्वारा किया जा सकता है।

(c) परियोजना कार्य के लिए 5 अंकों के भार इस प्रकार हो सकते हैं–

• परियोजना की पहचान और कथन	:	1 अंक
• परियोजना का कार्यक्रम या योजना	:	1 अंक
• अपनाई गई विधि	:	1 अंक
• एकत्रित आँकड़ों से प्रेक्षण	:	1 अंक
• परिणाम से निष्कर्ष और अनुप्रयोग	:	1 अंक

20 में से कुल अंक : वर्ष के अंत तक के क्रियाकलापों के मूल्यांकन से प्राप्त अंकों और परियोजना कार्य के अंकों को जोड़कर इनमें मौखिक मूल्यांकन के अंक जोड़ने चाहिए, जिससे 20 में से कुल अंक प्राप्त होंगे।

टिप्पणी : एक शैक्षिक वर्ष में प्रत्येक विद्यार्थी से कम से कम 20 क्रियाकलाप करवाए जाने चाहिए।